ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α – ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ι. Σύνολα – Σύμβολα Σχέσεων

- Φυσικοί Αριθμοί: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Ακέραιοι Αριθμοί: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$.
- Ρητοί Αριθμοί: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\mu}{\nu},\ \mu \in \mathbb{Z},\ \nu \in \mathbb{N}\right\}$.
- Πραγματικοί Αριθμοί: $\mathbb{R}$ =ρητοί και άρρητοι (όλοι οι αριθμοί)
- ⇒: (Συνεπάγεται). Το γράφουμε όταν από μια σχέση (Α) μπορούμε να συμπεράνουμε μια άλλη σχέση (Β). Αυτό όμως δεν προϋποθέτει ότι από τη σχέση Β μπορούμε να συμπεράνουμε τη σχέση Α.
- ⇔: (Διπλή Συνεπαγωγή – Ισοδυναμία). Το γράφουμε όταν οι δύο σχέσεις είναι ισοδύναμες. Δηλαδή από τη σχέση Α μπορούμε να συμπεράνουμε τη σχέση Β και αντιστρόφως, από τη σχέση Β μπορούμε να συμπεράνουμε τη σχέση Α.

ΙΙ. Ιδιότητες Πράξεων

Πρόσθεση	**Πολλαπλασιασμός**
1. Αντιμεταθετική ιδιότητα: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. 2. Ουδέτερο Στοιχείο: $\alpha + 0 = \alpha$. 3. Αντίθετος: $\alpha + (-\alpha) = 0$. 4. Προσεταιριστική Ιδιότητα: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.	1. Αντιμεταθετική ιδιότητα: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. 2. Ουδέτερο Στοιχείο: $\alpha \cdot 1 = \alpha$. 3. Αντίθετος: $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$, για κάθε $\alpha \neq 0$. 4. Προσεταιριστική Ιδιότητα: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. 5. Απορροφητικό Στοιχείο: $\alpha \cdot 0 = 0$.

Επιμεριστική Ιδιότητα: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Ιδιότητες Προσήμων: $\alpha \cdot (-\beta) = (-\alpha) \cdot \beta = -\alpha \cdot \beta$, $\quad (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$, $\ -\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$

ΙΙΙ. Ιδιότητες Δυνάμεων

Ορισμός: $\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$ (ν φορές), $\qquad \alpha^0 = 1,\ \alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$.

1. $(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu\mu}$
2. $\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}$
3. $\frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$
4. $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha \cdot \beta)^\nu$
5. $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$

IV. Απόλυτη Τιμή

Ως απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α, ορίζεται η απόσταση του αριθμού αυτού από το 0. Συγκεκριμένα:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}.$$

Για την απόλυτη τιμή έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\|\alpha \cdot \beta\| = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$. 2. $\left\|\frac{\alpha}{\beta}\right\| = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$. 3. $\|\alpha\|^2 = \alpha^2$. 4. $\|\alpha\| = \|-\alpha\|$. 5. $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$. 6. $\|\alpha\| \geq \alpha,\ \|\alpha\| \geq -\alpha$. 7. $\|\alpha\| \geq 0$ 8. $-\|\alpha\| \leq \alpha \leq \|\alpha\|$.	Επίλυση Εξισώσεων $\|x\| = \theta \Leftrightarrow \quad x = \theta$ ή $x = -\theta$ $\|x\| = \|y\| \Leftrightarrow x = y,$ ή $x = -y$ Επίλυση Ανισώσεων $\|x\| \leq \theta \Leftrightarrow \ -\theta \leq x \leq \theta$ $\|x\| \geq \theta \Leftrightarrow \ x \geq \theta$ ή $x \leq -\theta$

V. Ρίζες

Τετραγωνική Ρίζα $\sqrt{\alpha}$: είναι ο θετικός αριθμός, ο οποίος αν υψωθεί στη δευτέρα (στο τετράγωνο) θα μας δώσει αποτέλεσμα τον αριθμό α, δηλαδή $\theta = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \theta^2 = \alpha,\ \theta > 0$.

ν-οστή Ρίζα $\sqrt[\nu]{\alpha}$: είναι ο θετικός αριθμός , ο οποίος αν υψωθεί στη δύναμη ν θα μας δώσει αποτέλεσμα τον αριθμό α, δηλαδή $\theta = \sqrt[\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \theta^\nu = \alpha,\ \theta > 0$.

Τετραγωνική ρίζα	**ν-οστή ρίζα**
1. $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$. 2. $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$. 3. $\sqrt{\alpha}^2 = \alpha$. 4. $\sqrt{\alpha^2} = \|\alpha\|$. 5. $\sqrt{\alpha} := \alpha^{\frac{1}{2}}$,	6. $\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$. 7. $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$. 8. $\sqrt[\nu]{\alpha}^\nu = \alpha$. 9. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \begin{cases} \|\alpha\|, & \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ \alpha, & \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$. 10. $\sqrt[\nu \cdot \kappa]{\alpha^{\mu \cdot \kappa}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ 11. $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} := \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$

VI. Βασικές Ταυτότητες

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
4. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
5. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
6. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
7. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

VII. Ιδιότητες Ισοτήτων

- Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, για κάθε πραγματικό αριθμό γ.
- Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$, για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό γ ($\gamma \neq 0$).
- Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^2 = \beta^2$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Μάλιστα ισχύει η ισοδυναμία $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$. Επομένως αν $\alpha^2 = \beta^2$, τότε έχουμε $|\alpha| = |\beta|$ και όχι $\alpha = \beta$.
- Αν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\gamma = 0$.
- Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.
- Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha\gamma = \beta\delta$.

VIII. Ιδιότητες Ανισοτήτων

- Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, για κάθε πραγματικό αριθμό γ.
- Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$, για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό γ ($\gamma > 0$).
- Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$, για κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό γ ($\gamma < 0$).
- Αν $\alpha > \beta > 0$, τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.
- Αν $\alpha > \beta > 0$, τότε $\alpha^2 > \beta^2$. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Μάλιστα ισχύει η ισοδυναμία $|\alpha| > |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2$. Επομένως αν $\alpha^2 > \beta^2$, τότε έχουμε $|\alpha| > |\beta|$ και όχι $\alpha > \beta$.
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

IX. Προτεραιότητα Πράξεων

1. Παρενθέσεις
2. Δυνάμεις
3. Πολλαπλασιασμοί, Διαιρέσεις (από αριστερά προς τα δεξιά)
4. Προσθέσεις, Αφαιρέσεις (από αριστερά προς τα δεξιά)

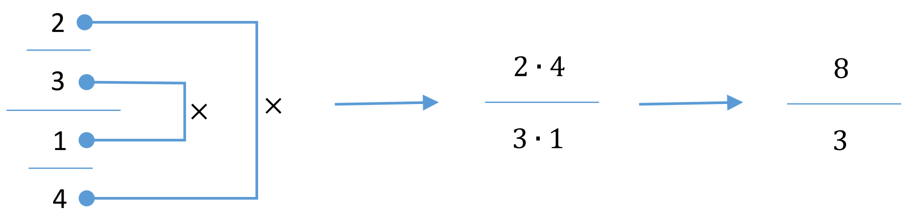
X. Πράξεις με κλάσματα

1. **Απλοποίηση – Ισοδύναμα Κλάσματα**.
   a. Ένα κλάσμα με μεγάλους αριθμούς μπορεί να «απλοποιηθεί» διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό. Το ιδανικό είναι να επιλέξουμε τον μέγιστο κοινό Διαιρέτη (ΜΚΔ) του αριθμητή και του παρονομαστή. Π.χ. $\frac{10}{25} = \frac{10:5}{25:5} = \frac{2}{5}$, $\frac{12}{30} = \frac{12:6}{30:6} = \frac{2}{5}$.
   b. Πολύ συχνά είναι χρήσιμη η «ανάποδη» διαδικασία. Δηλαδή χρειάζεται να μεγαλώσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή ενός κλάσματος. (Για παράδειγμα μπορεί να θέλουμε να μετατρέψουμε ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό) Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό.
   Π.χ. $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{40}{100}$.
2. **Πρόσθεση - Αφαίρεση**
   a. Για να προσθέσουμε δύο κλάσματα πρέπει να έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Επομένως, πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα (αν δεν είναι) βρίσκοντας το ΕΚΠ των παρονομαστών (αυτή είναι η γνωστή διαδικασία με τα καπελάκια που ξέρουμε από το γυμνάσιο).
   Π.χ.: $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12}$.
   b. Για την αφαίρεση δουλεύουμε παρόμοια, Π.χ.: $\frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{4}{12} - \frac{9}{12} = \frac{4-9}{12} = -\frac{5}{12}$.
3. **Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση**
   a. Στον Πολλαπλασιασμό: πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή.
   Π.χ. $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

b. Στη Διαίρεση: αντιστρέφουμε το δεύτερο κλάσμα (διαιρέτη) και κάνουμε πολλαπλασιασμό. Π.χ. $\frac{1}{3}:\frac{3}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 3}=\frac{4}{9}$.

4. Σύνθετα Κλάσματα

a. Αν εμφανιστεί σύνθετο κλάσμα, δηλαδή κλάσμα που είτε στον αριθμητή ή στον παρονομαστή έχει επίσης κλάσμα, τότε κάνουμε το κλάσμα απλό χρησιμοποιώντας την ιδιότητα «Ακροι – Μέσοι». Πολλαπλασιάζουμε δηλαδή τον αριθμητή του αριθμητή με τον παρονομαστή του παρονομαστή και τον παρονοματή του αριθμητή με τον αριθμητή του παρονομαστή.



Παραδείγματα: $\dfrac{2}{\frac{1}{4}}=\dfrac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{2\cdot 4}{1\cdot 1}=8,\quad \dfrac{\frac{2}{5}}{4}=\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{1}}=\dfrac{2\cdot 1}{5\cdot 4}=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$

XI. Παραγοντοποίηση

Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία μετατροπής ενός αθροίσματος σε γινόμενο. Αυτό βέβαια δεν είναι πάντα εφικτό. Οι βασικές τεχνικές παραγοντοποίησης είναι οι παρακάτω:

- **Κοινός παράγοντας**: Αν οι όροι του αθροίσματος έχουν κάποιο κοινό παράγοντα, τότε η παραγοντοποίηση είναι άμεση:
    - $ay^2-by^2=y^2(a-b)$
    - $xy^2-x^2y=xy(y-x)$
    - $x^2y^3-x^2y^2+xy^4=xy^2(xy-x+y^2)$
    - Και ένα ένα πιο «περίεργο» παράδειγμα: $n^3-n+1=n^3\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$.
- **Παράγοντες κατά ζεύγη**:
    - $ax-bx+ay-by=ax+ay-bx-by=\alpha(x+y)-b(x+y)=(x+y)(a-b)$.
    - $ax^2-ay^2+bx-by=\alpha(x^2-y^2)+b(x-y)=\alpha(x-y)(x+y)+b(x-y)$ $=(x-y)(a(x+y)+b)$.
- **Χρήση των βασικών ταυτοτήτων**:
    - $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$
    - $x^4-2x^2y+y^2=(x^2-y)^2$
    - $x^2-4xy+4y^2=(x-2y)^2$
    - $2x^2-2\sqrt{2}xy+y^2=(\sqrt{2}\cdot x-y)^2$
    - $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
    - $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

Ασκήσεις για εξάσκηση:

1. Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση $3(x-2y)-2(-4y-5(2x-3y)+4xy)-3(y-2x)$ και να βρείτε την αριθμητική της τιμή για $x=-1$ και $y=\dfrac{2}{3}$.

2. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

a. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{5+\frac{1}{2}}$

b. $\dfrac{1-\dfrac{2}{3}}{1+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}}$

c. $\dfrac{5+\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{5}}}{1+\dfrac{4-\dfrac{2}{3}}{5}}$

3. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις και να βρείτε την αριθμητική τους τιμή για $\alpha = \dfrac{-1}{2}$ και $\beta = 0.01$.

a. $3(2\alpha - 3\beta) - 4(-3\alpha + 2(\alpha + 2\beta - 1))$.

b. $-2(-2\beta + \alpha(-2\beta + 1)) + 3(-2(\alpha + \beta) + (-2\alpha - 4\beta + 3))$.

4. Να κάνετε τις πράξεις

a. $5x(x-1)^2 - 3x(2x-3)^2 + (x-1)^3 - (2x+1)^3 + 2x(4x-3)(4x+3)$

b. $(1-2x)^2 - x(-x-1)^2 + (2-3x)(2+3x)$

c. $(a+2b)^3 - (2a-b)^3 - (a-b)^2(a+b)$

5. Να κάνετε τις πράξεις: $(x^2 - x + 1)^2 - 2(2x - x^2 - 3)^2 + 3x(x-2)^3$.

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

a. $7(3x+1)^2 - 28(x-2)^2$

b. $(a-1)^3(a^2-4) + 4 - a^2$

c. $x^2 - 2xy + y^2 - x + y$

d. $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$

e. $(2a-3b)(x-3y) + (3a-b)(-x+3y)$

f. $x^3 + x^2 - x - 1$

g. $(2x-3)(x+1) + (3-2x)(2x+8) + 4x^2 - 9$

h. $a^4b - ab^4 + b^3 - a^3$

7. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα.

a. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + 4x}$

b. $\dfrac{a^5 - a^3 + a^2 - 1}{a^3 + a^2 - a - 1}$

8. Να κάνετε τις πράξεις $\left(\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\dfrac{a-b}{a+b} - \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$.

9. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

a. $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

b. $\dfrac{4k - k^3}{k^2 - 4k + 4}$

c. $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$

d. $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} - \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$

10. Απλοποιήστε τις παρακάτω παραστάσεις

a. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

b. $(-2)^3 \cdot (-0.5)^{-2}$

c. $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 0.1^{-3}\right) : (-10)^2$

11. Να βρείτε την τιμή της παράστασης, $\mathrm{A} = \left(\left(x^2 y^{-1}\right)^2 x^{-1} \left(y^3\right)^{-2}\right)^{-1} : \left(\dfrac{y^{-2}}{x^4}\right)^{-3}$, για x=0.01 και y=$10^{-1}$.